1.4) a) $\{\alpha[1\ 0\ 1]^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$

Para ver si es subespacio tienen que cumplir:

I) $\bar{0} \in S$

II) $v, w \in S \rightarrow v+w \in S$

III) $\lambda \in K,\ v \in S \rightarrow \lambda v \in S$

I) $\bar{0} \in S$ ya que $0.[1\ 0\ 1] = [0\ 0\ 0]$ ✓

II) Tomo $v = \alpha_1 [1\ 0\ 1]$
$w = \alpha_2 . [1\ 0\ 1]$
$\rightarrow v+w = \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{\alpha 3} . [1\ 0\ 1] = \alpha 3 . [1\ 0\ 1] \in S$ ✓

Suma de escalares → otro escalar.

III) Tomo $v = \alpha[1\ 0\ 1]$, $\lambda \in K \rightarrow \lambda v = \underbrace{\lambda . \alpha}_{\gamma}[1\ 0\ 1] = \gamma [1\ 0\ 1] \in S$ ✓

Prod. de escalares → otro escalar

ES SUBESPACIO.

b) $\{\alpha . [1\ 0\ 0]^T + \beta . [1\ 0\ 1]^T : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

I) → $0_{\mathbb{R}^3} \in S$ ya que con $\alpha = 0, \beta = 0 \rightarrow 0.[1\ 0\ 0] + 0.[1\ 0\ 1] = [0\ 0\ 0]$ ✓

II) Tomo $v = \alpha_1 [1\ 0\ 0] + \beta_1 [1\ 0\ 1]$
$w = \alpha_2 . [1\ 0\ 0] + \beta_2 . [1\ 0\ 1]$
$\rightarrow v+w = \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{\alpha 3} . [1\ 0\ 0] + \underbrace{(\beta_1+\beta_2)}_{\beta 3} . [1\ 0\ 1] \rightarrow$

Suma de escalares da otro escalar.

$\rightarrow \alpha 3 [1\ 0\ 0] + \beta 3 [1\ 0\ 1] \in S$ ✓

III) Tomo $v = \alpha[1\ 0\ 0] + \beta . [1\ 0\ 1]$, $\lambda \in K \rightarrow \lambda v = \underbrace{\lambda \alpha}_{\gamma} [1\ 0\ 0] + \underbrace{\lambda \beta}_{\theta} . [1\ 0\ 1] \rightarrow$

Producto de dos escalares da otro escalar

$\rightarrow \gamma . [1\ 0\ 0] + \theta [1\ 0\ 1] \in S$ ✓

ES SUBESPACIO.

1.4) c) $\left\{ \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

I) $O_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \in S$ ya que con $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\lambda = 0 \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

II) Tomo $v = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$w = \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$v + w = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to$

Suma de escalares → otro escalar

$\to \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$ ✓

III) Tomo $v = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\theta \in K \to \theta v = \theta \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to$

Producto de escalares → otro escalar

$\to \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$ ✓

ES SUBESPACIO.

1.4d) $\left\{ \sum_{k=0}^{m} a_k x^k : a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$

I) $0_{\mathbb{R}[x]} \in S$ ya que con $a_0, a_1, \ldots, a_m = 0 \to \sum_{k=0}^{m} 0 \cdot x^k = 0$ ✓

II) Tomo $v = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ y $w = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$

~~Prop. sumatoria~~

$\cancel{v+w = \sum_{k=0}^{m} (a+b)_k x^k = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + b_k x^k = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$

$v+w \to \sum_{k=0}^{m} \underbrace{(a+b)_k}_{c_k} x^k \to \sum_{k=0}^{m} c_k x^k \in S$ ✓

Suma de reales → otro real.

III) Tomo $v = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $\lambda \in K \to \lambda v = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{(\lambda a)_k}_{b_k} x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \in S$ ✓

Producto de reales → otro real.

Es subespacio.

1.4e) $\left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)] : a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \right\}$

I) $0_{C^\infty(\mathbb{R})} \in S$ ya que con $a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m = 0 \to$ queda 0 ✓

II) Tomo $v = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)]$,

$w = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [c_k \cos(2k\pi t) + d_k \operatorname{sen}(2k\pi t)]$

$v+w \to \underbrace{\left(\frac{a_0}{2} + \frac{c_0}{2}\right)}_{\text{otro escalar (real)}} + \sum_{k=1}^{m} [\underbrace{(a+c)_k}_{\text{otro escalar (real)}} \cos(2k\pi t) + \underbrace{(b+d)_k}_{\text{otro escalar (real)}} (2k\pi t)] \to$

$\to \frac{h_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [h_k \cos(2k\pi t) + l_k (2k\pi t)] \in S$ ✓

(III) Tomo $v = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)]$

$\lambda \in K \to \lambda v = \frac{\lambda a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [(\lambda a)_k \cos(2k\pi t) + (\lambda b)_k \operatorname{sen}(2k\pi t)] \to$

otro escalar real.

$\to \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [c_k \cos(2k\pi t) + d_k \operatorname{sen}(2k\pi t)]$ ES ✓

ES SUBESPACIO .